Exercice 2 **5 points**

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(1 ; 1 ; -4), \quad B(2 ; -1 ; -3), \quad C(0 ; -1 ; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1; 1; 2).$$

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-1 \\ -3-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-1 \\ -1-1 \\ -1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés; ils définissent donc un plan.

2. **a.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) a donc une équation cartésienne de la forme $x + y + z + d = 0$. On détermine d en utilisant le fait que le point A appartient au plan (ABC).

$A \in (ABC) \iff x_A + y_A + z_A + d = 0 \iff 1 + 1 - 4 + d = 0 \iff d = 2$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $x + y + z + 2 = 0$.

3. **a.** $x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 2 = 1 + 1 - 2 + 2 = 2 \neq 0$ donc $\Omega \notin (ABC)$.

b. Soit H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

Donc $\overrightarrow{\Omega H}$ est un vecteur orthogonal au plan (ABC), donc il est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, et il a donc des coordonnées de la forme $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega H}$ sont $\begin{pmatrix} x_H - x_\Omega \\ y_H - y_\Omega \\ z_H - z_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 1 \\ z_H - 2 \end{pmatrix}$.

On déduit donc que $\begin{cases} x_H - 1 = k \\ y_H - 1 = k \\ z_H - 2 = k \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_H = 1 + k \\ y_H = 1 + k \\ z_H = 2 + k \end{cases}$

Or le point H appartient au plan (ABC) donc : $x_H + y_H + z_H + 2 = 0 \iff (1 + k) + (1 + k) + (2 + k) + 2 = 0 \iff 6 + 3k = 0 \iff k = -2$.

Le point H a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 2-2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On admet que $\Omega H = 2\sqrt{3}$. On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = 2\sqrt{3}$.

4. Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC), donc ΩH est la plus courte distance entre Ω et tout point du plan; autrement dit, tout point N de (ABC) distinct de H est tel que $\Omega\text{N} > \Omega\text{H}$, donc $\Omega\text{N} > 2\sqrt{3}$.

Ce qui prouve que le point N n'appartient pas à la sphère S.

On dit qu'un plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\text{K} \in \mathscr{P} \cap S$
- $(\Omega\text{K}) \perp \mathscr{P}$

5. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées K(3 ; 3 ; 0).

- $x_\text{K} + y_\text{K} - z_\text{K} - 6 = 3+3-0-6 = 0$ donc $\text{K} \in \mathscr{P}$
  $\Omega\text{K}^2 = (3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-2)^2 = 4+4+4 = 12$ donc $\Omega\text{K} = 2\sqrt{3}$; et donc $\text{K} \in S$.
  Donc $\text{K} \in \mathscr{P} \cap S$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\Omega\text{K}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3-1\\3-1\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

  Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{\Omega\text{K}} = -2\overrightarrow{n'}$; or $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ donc $\overrightarrow{\Omega\text{K}}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$, et donc $(\Omega\text{K}) \perp \mathscr{P}$.

On en conclut que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

Rem. – Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires donc (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

On résout le système :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \cap \mathscr{P} \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z+2=0\\ x+y-z-6=0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{r} x+y+z+2=0\\ (x+y+z+2)-(x+y-z-6)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z+2=0\\ z+2+z+6=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+2 &=& 0\\ z &=& -4\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x+y-2 &=& 0\\ z &=& -4\end{array}\right.$

On peut l'écrire $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-y\\ y &=& y\\ z &=& -4\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& -4\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

La droite (Δ) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& -4\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.